Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Tentamen Statistiek voor Astronomen

20 januari 2012, 10:00–13:00

Je mag boeken en aantekeningen gebruiken. Schrijf leesbaar en motiveer je antwoorden.

Opgave 1

Stel men heeft een munt waarvoor de kans op "kop" gelijk is aan p, waarbij $0 < p < 1$. Men werpt de munt net zo lang tot men voor de r'e keer "kop" ziet. Noem het aantal keer dat men inmiddels "munt" heeft gezien X. Merk op dat X de waarden $x = 0, 1, 2, \ldots, \infty$ zou kunnen aannemen. De laatste waarde ∞ kan dus alleen voorkomen als de munt nooit meer dan $r - 1$ keer "kop" valt terwijl men oneindig lang doorgaat met worpen.

(a) Redeneer dat $P(X = x) = p(x) = C_{r-1}^{x+r-1} p^r (1-p)^x$, voor $x = 0, 1, \ldots$, waar C_y^n staat voor het binomiale coëfficiënt "n kies y", het aantal manieren om y objecten uit een verzameling van n te kiezen.

(b) Redeneer, bijvoorbeeld met behulp van de wet van grote aantallen, dat $\sum_{x<\infty} p(x) = 1$, oftewel dat X met kans één eindig is.

(c) Laat zien dat $\mathrm{E}(X) = rp/(1-p)$ en $\mathrm{Var}(X) = rp/(1-p)^2$.

(d) Uit voorgaande onderdeel blijkt dat zowel verwachting als variantie evenredig met r zijn. Nu is het zo dat het totaal aantal keer "munt" dat gegooid word, opgebouwd is uit het aantal tot de eerste keer "kop", het aantal hierna tot de tweede keer "kop", enzovoorts, tot en met het aantal vanaf de $r-1$'d keer "kop" tot de r'e keer. Kunt U hieruit een alternatief bewijs geven voor de beide net genoemde evenredigheids relaties?

(e) Stel dat men dit experiment n keer herhaalt, noem de uitkomsten X_1, ..., X_n. Bereken de methode-van-momenten schatter van p en de meest aannemelijkheids schatter van p.

(f) Hoe zou U de variantie van de meest aannemelijkheids schatter van p schatten?

Opgave 2

Ter herinnering: de gamma verdeling met parameters $\lambda > 0$ en $k > 0$ heeft een kansdichtheid evenredig met $\exp(-\lambda x)x^k$, $x > 0$; de Cauchy verdeling met parameters μ en σ heeft kansdichtheid evenredig met $1/(1 + (x-\mu)^2/\sigma^2)$, $-\infty < x < \infty$.

(a) Hoe ziet een plot uit, van de quantielen van een gamma verdeling uitgezet tegenover de bijbehorende quantielen van een standaard Gauss verdeling? (Een zogenaamde QQ plot).

(b) En hoe ziet een plot uit, van de quantielen van een Cauchy verdeling tegenover de bijbehorende quantielen van een Gauss verdeling?

In beide gevallen gaat het om kenmerkende aspecten van de verdeling die in de praktijk van nut zou kunnen zijn om uitspraken te doen over de verdeling van een stel experimentele gegevens (ihb, de vraag: wel of niet Gauss verdeeld?), als je een QQ-plot van de data tegenover een Gauss verdeling maakt.

Leg hierbij uit, in beide gevallen, wat het effect van de parameters van de verdeling is op de grafiek.

Opgave 3

Stel ik heb een steekproef ter grootte n uit een normale verdeling met onbekende verwachting μ en onbekende variantie σ^2. Ik wil de nul hypothese toetsen dat $\sigma^2 = 1$. Leid de "generalized likelihood ratio" toets af voor deze situatie, inclusief een aanwijzing van hoe U hem uit zou voeren om een toets met significantie niveau (bij benadering) $\alpha = 0.05$ te krijgen.

Opgave 4

Stel dat het aantal fotonen geregistreerd uit een verre bron Poisson verdeeld is met parameter (verwachtingswaarde) $T\mu$, waar T de waarnemingsduur is en $\nu > 0$ de (onbekende) kracht van de bron. Men heeft *a priori* ideeën over μ, en besluit, voor het gemak, om die vorm te geven door een gamma verdeling.

(a) Kunt U ruwe aanwijzingen geven voor de keuze van de twee parameters van de prior verdeling?

(b) Wat is de *a posteriori* kansverdeling van μ, nadat dat men $N = n$ fotonen waargenomen heeft in een waarnemingsperiode ter lengte T?

(c) Laat zien dat naarmate T toeneemt, de conclusies van onze Bayesiaans astronoom en die van een klassiek (frequentistisch) astronoom steeds meer op elkaar gaan lijken. U kunt hierbij van uitgaan dat het onderliggende model inderdaad waar is, wat inhoudt dat bij steeds groter wordende T, N/T nadert tot de werkelijke (onbekende) waarde van μ. U kunt ook gebruik maken van het feit dat een gamma verdeling, bij steeds groter wordende vorm-parameter, steeds meer op de Gauss verdeling lijkt met dezelfde verwachting en variantie.